Problemas de Series

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

P5. Analizar convergencia de

a) (1p) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\cdot\frac{1}{3^n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} e^2\frac{1}{3^n}$

D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^2\cdot\frac{1}{3^{n+1}}}{e^2\cdot\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

∴ Converge

b) (2p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^r}$, para i) $r>1$ ii) $0<r\leq 1$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^r} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^r} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r-1}}$

i) Diverge si $r\leq 2$

Converge si $r>2$

$0<r\leq 1$

$-1<r-1\leq 0$

Serie diverge

c) (1p) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n(n+1)^2}$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n(n+1)^2} = 0$

Converge

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n(n+1)^2} \to \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5^{n+1}(n+2)^2}}{\frac{1}{5^n(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \frac{1}{5}<1$$

Conv absolut.

Problemas de Series

P4. Sea $(x_n) = (\sqrt[n]{n})$

(a) calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (1p)

(b) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\text{sen}\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)$ (2p)

OBS: $\text{Sen}\alpha\,\text{Sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$$\ln x_n = \ln \sqrt[n]{n} \qquad \ln x_n = \frac{1}{n}\ln n = \frac{\ln n}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln x_n = 0 \qquad = \lim_{n\to\infty} e^{\ln x_n} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^2+n} - \frac{2n+1}{n^2+n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2+n} + \frac{2n+1}{n^2+n}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{2}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

$n=1$: $\cos\left(\frac{2}{2}\right) - \cos\left(\frac{2}{1}\right)$ $n=2$: $+\cos\left(\frac{2}{3}\right) - \cos\left(\frac{2}{2}\right)$ $n=3$: $+\cos\left(\frac{2}{4}\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2}{n+1}\right) - \cos(2) = 1 - \cos(2)$$

Problemas de Series

1. (6 puntos)

a) Analice si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\sqrt{n}-3)^2}$ converge condicionalmente o absolutamente.

b) Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$.

c) Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\sqrt{n}-3)^2} = 0$$

Converge ✓

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{n})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

∞ Conv condicional

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$$

$$\frac{\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}+1}}{\frac{2^n+1}{3^n+1}} =$$

$$(\,)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

$$-\int_1^{\infty} -\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \qquad \frac{1}{x} = u \qquad \frac{-dx}{x^2} = du$$

$x = 1 \to u = 1$ $\quad x \to \infty \;\; u = 0$

$$-\int_1^0 e^u\,du$$

$$-\int_0^1 -e^u\,du = [e^u]_0^1 = e-1$$

Conv $\to$ La serie conv

Problemas de Ecuaciones Diferenciales

Resuelva $\begin{cases} (x^2+1)y' + xy = 2x(x^2+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = 2x \qquad \mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2+1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2+1|} = \sqrt{x^2+1}$$

$$y'\sqrt{x^2+1} + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}y = 2x\sqrt{x^2+1}$$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\cdot y\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot y + y'\cdot\sqrt{x^2+1}$$

$$\int\left(\sqrt{x^2+1}\,y\right)'dx = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1 = u$

$2x\,dx = du \qquad \int\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]$

$$\sqrt{x^2+1}\,y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C \rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}(x^2+1) + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$y(0) = 1$$

$$1 = \frac{2}{3}(1) + \frac{C}{\sqrt{1}}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}(x^2+1) + \frac{1}{3\sqrt{x^2+1}}$$

Problemas de Ecuaciones Diferenciales

[redacted]

Una población $P(t)$ es atacada por una enfermedad que provoca que su población cese de reproducirse y mueran con un índice de mortalidad inversamente proporcional a $\sqrt{P(t)}$

Si inicialmente hay 900 individuos y 6 semanas después quedaban 441

¿En cuánto tiempo morirán todos?

$$\frac{dP}{dt} = -K\sqrt{P}$$

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} = \int -K\,dt$$

$$2\sqrt{P} = -Kt + C$$

$$\sqrt{P} = \frac{-Kt}{2} + C$$

$$P = \left(-\frac{Kt}{2} + C\right)^2$$

$t = 0 \quad P = 900$

$900 = C^2 \quad C = 30$

$$P = \left(-\frac{Kt}{2} + 30\right)^2$$

$t = 6 \quad P = 441$

$$441 = \left(-\frac{6K}{2} + 30\right)^2$$

$21 = -3K + 30$

$-9 = -3K \quad K = 3$

$$P(t) = \left(-\frac{3}{2}t + 30\right)^2$$

$P = 0$

$$0 = \left(-\frac{3}{2}t + 30\right)^2$$

$$0 = -\frac{3}{2}t + 30$$

$t = 20$

Problemas de Areas

4. Halle explícitamente la función f, sí su derivada f' es continua para todo $x \geq 1$. Además, $f(x) > 0$ y

$$f(x) = 1 + \int_1^{x^2} \frac{f(\sqrt{t})}{1+t^2} dt.$$

(5 puntos)

$f(x) = y$

$$f'(x) = \frac{f(\sqrt{x^2})}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = f'(x) = \frac{f(x)}{1+x^4} \rightarrow y' = \frac{y}{1+x^4} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^4} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^4}$$

$$\ln y = \int \frac{dx}{1+x^4} = \int \left(\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)} - \frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2x+\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)} - \frac{2x-\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \int \left(\frac{-x}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)} \right)$$

Problemas de Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{a}{1 - \text{Razón}}$$

PREGUNTA 2 (6 puntos)

Instrumentos de renta variable (Modelo de Gordon):

Una acción puede ser valorizada según el dividendo que genere. Si asumimos que alguna acción adquirida hoy reparte un dividendo D que crecerá a una tasa constante g cada período, el valor actual de dicho instrumento es:

$$P = D + D\frac{(1+g)}{1+r} + D\frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + D\frac{(1+g)^3}{(1+r)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} D\frac{(1+g)^n}{(1+r)^n}$$

$$\frac{1+g}{1+r} < 1 \qquad 1+g < 1+r \qquad g < r$$

a) ¿Qué condiciones deben cumplir g y r para que el precio de la acción sea una serie convergente?

b) Demuestre que, dado su razonamiento en a), $P = D\dfrac{(1+r)}{(r-g)}$.

$$\frac{D}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{D}{\frac{1+r-1-g}{1+r}} = \frac{D(1+r)}{r-g}$$

$$g - r < 0$$

c) Considere la siguiente versión del caso anterior:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} D\frac{e^{ng}}{e^{nr}} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ng}}{e^{ng}} = \sum_{n=0}^{\infty} D$$

Mediante el criterio de la integral determine las condiciones que deben cumplirse para que P sea convergente. Compare sus resultados con los obtenidos en a).

$$D\int_0^{\infty} \frac{e^{xg}}{e^{xr}}\,dx = \int_0^{\infty} De^{x(g-r)}\,dx = \left[D(g-r)e^{x(g-r)}\right]_0^{\infty}$$

$$0 \quad -D(g-r)$$

Cond

$g - r < 0$

$r > g$

Problemas de Series

4. Determine la convergencia o no de:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+25}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(n)}{(n+1)^3}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n^2\pi}{3n^2+1}\right)$.

e) $\int_a^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x^2}dx,\ a>0.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+25} = 0$ Decrec ∴ Conv $\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Div ∴ Conv Cond

$\lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Problemas de Areas

P.1

(2p) ⓐ Calcule área limitada por eje Y y curva C: $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t + t^2 \end{cases}$; $0 \le t \le 1$

dejar espacio

(2p) ⓑ Calcule área de la región exterior a $r = sen(2\theta)$ e interior a $r = \cos(\theta)$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} sen^2(2\theta)$

P.2 : Sea $f(x) = \int_0^x sen(t^2)\,dt$

(2p) a) Use el polinomio de Taylor grado 3 alrededor de x=0 de f, para aproximar valor de $\int_0^{0.5} sen(t^2)\,dt$

(1p) b) Estime el error de la integración.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$